Ciro Baratto

GONIOMETRIA
TRIGONOMETRIA
799 ESERCIZI SVOLTI

INTRODUZIONE

Gli esercizi (n. 799) che seguono sono stati svolti per una migliore comprensione della goniometria e della trigonometria, cercando, in larga misura, di non tralasciare passaggi intermedi. A tal fine sono state introdotte note esplicative.

Suddivisi per argomenti, essi sono preceduti da richiami teorici e/o dalle formule applicate.
E' stato adottato inizialmente il simbolo $\bullet$ per rappresentare l'operazione di moltiplicazione.

Si è ritenuto utile richiamare in via preliminare, i concetti di potenza e di razionalizzazione.
Questo libro di esercizi è destinato a tutti quelli che desiderano apprendere ed approfondire i concetti trattati.

Si accetterà con gratitudine qualsiasi suggerimento teso a migliorare la presente edizione.

Napoli, settembre 2008 ing. Ciro Baratto

PARTE PRIMA

1-ALGEBRA

1.1-CONCETTO DI POTENZA

Si ricorda che i numeri negativi elevati a potenza pari si trasformano in positivi mentre quelli elevati a potenza dispari rimangono negativi.
Ciò deriva dalla definizione di potenza:
x^n è il prodotto n volte x con n intero .
Ciò deriva dalla definizione di potenza:

$$x^n = x \bullet x \bullet x \ldots\ldots \bullet x(\text{n volte}) \text{ con x ad R(insieme dei numeri reali)}$$

Dunque $x^2=x\bullet x$ e $x^3=x\bullet x\bullet x$
Cioè in $x\bullet x$, x compare 2 volte e in $x\bullet x\bullet x$, x compare 3 volte.
Se x= -1 si ha:

$$x^2=x\bullet x= (-1)\bullet(-1) = +1$$
$$x^3=x\bullet x\bullet x=(-1)\bullet(-1)\bullet(-1)=-1$$

poiché meno per meno fornisce più e più per meno fornisce meno.
Si deduce che i numeri negativi elevati a potenza dispari rimangono negativi.
I numeri negativi elevati a potenza pari si trasformano in positivi.

NOTA ESPLICATIVA N.1
L'espressione $\sqrt{n}$ è uguale a
$\sqrt[2]{n}$;l'espressione $\sqrt{+n} = \sqrt{n};+\sqrt{n} = \sqrt{n};In / matematica / + / è / sott\,\mathrm{int}\,eso$
Nel prosieguo useremo la forma $\sqrt{n}$

ESERCIZI

1) $(+4)^3 = +4 \bullet +4 \bullet +4 = 64$

2) $(+3)^{-3} = \dfrac{1}{+3^3} = \dfrac{1}{+3 \bullet +3 \bullet +3} = \dfrac{1}{27}$

3) $\left(+\sqrt{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{(+\sqrt{3})^3} = \dfrac{1}{+\sqrt{3^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{+27}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

4) $\left(\sqrt{+2}\right)^2 = \sqrt{+2} \bullet \sqrt{+2} = 2$

5) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{+2}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{+2}}} = \sqrt{2}$

6) $\left(\sqrt{+4}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{+4}\right)^{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{+64}}=\dfrac{1}{8}$

7) $\dfrac{\sqrt{(+5)^{-2}}}{\sqrt{(+3)^{-2}}}=\dfrac{\dfrac{1}{\left(\sqrt{+5}\right)^{2}}}{\dfrac{1}{\left(\sqrt{+3}\right)^{2}}}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{25}}}{\dfrac{1}{\sqrt{9}}}=+\dfrac{1}{5}\bullet(+3)=\dfrac{3}{5}$

8) $\sqrt[3]{(27)}=\sqrt[3]{(3)^{3}}=3$

9) $\sqrt[4]{+49}=\sqrt[4]{(+7)^{2}}=\sqrt{7}$

NOTA ESPLICATIVA N.2
L'espressione (+n) può scriversi (n) cioè si sottintende il segno +
Nel prosieguo ometteremo il segno +

NOTA ESPLICATIVA N. 3
L'espressione (a)$\bullet$(b)=a$\bullet$b=ab
L'espressione (-a)(b)=-a$\bullet$b=-ab

10) $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^{2}}=\sqrt{3}$

11) $\sqrt[8]{81}=\sqrt[8]{3^{4}}=\sqrt{3}$

12) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{(2)^{5}}=2$

1-ALGEBRA

1.2-CONCETTO DI RAZIONALIZZAZIONE

Quando al denominatore di una frazione compare il segno del radicale,per rendere esso razionale si
esegue la cosiddetta **razionalizzazione.**
Con tale termine si suole indicare quel complesso di operazioni che consentono di ottenere un denominatore privo di radicali.

A)Se la frazione è del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$ si opera nel modo seguente:

1)Si moltiplica $\frac{a}{\sqrt{b}}$ per 1 permanendo $\frac{a}{\sqrt{b}}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \bullet 1$$

2)Al posto di 1 possiamo sostituire un qualunque rapporto di termini uguali;scegliamo $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \bullet 1 = \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$$

3)Si esegue il prodotto dei numeratori e dei denominatori:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \bullet 1 = \frac{a}{\sqrt{b}} \bullet \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = a \bullet \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2}$$

4)Si elidono il segno del quadrato e della radice quadrata al denominatore trattandosi di funzioni
una,inversa dell'altra,ottenendosi:

$$a \bullet \frac{\sqrt{b}}{b}$$

ESERCIZI

13) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \bullet 1 = \frac{3}{\sqrt{5}} \bullet \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3 \bullet \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} \, 3 \bullet \frac{\sqrt{5}}{5}$

14) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$

15) $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \bullet \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 3\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Esercizio n. 16

16) $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \bullet \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

17) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \bullet \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

18) $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

19) $\frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{3 \bullet 2^2}} = \frac{2}{2 \bullet \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Omettiamo il simbolo $\bullet$ per indicare il prodotto se non nel prodotto fra due o più numeri.

20) $2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 \bullet 3^2}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{6}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

B)Se la frazione è del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ *si / opera / nel / seguente /* mod*o* :

1)Si moltiplica $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ *per 1 permanendo* $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ *:*

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \bullet 1$$

2)Al posto di 1 possiamo sostituire un qualunque rapporto di termini uguali.Scegliamo il rapporto

del coniugato di $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ *e cioè* $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ *:*

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \bullet 1 = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \bullet \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$$

3)Si esegue il prodotto dei numeratori e dei denominatori considerando che il prodotto dei denominatori è del tipo $(a+b)\bullet(a-b)=a^2-b^2$ *:*

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \bullet 1 = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \bullet \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = a \bullet \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}$$

4)Si elidono i segni di quadrato e di radice quadrata,ottenendosi:

$$a\bullet\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

C)Se la frazione è del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ ***si procede allo stesso modo che in B) scegliendo il rapporto***

del coniugato di $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ ***e cioè*** $\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

D)Se la frazione è del tipo $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ ***si avrà:***

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}\bullet 1=\frac{a}{b+\sqrt{c}}\bullet\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=a\frac{(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2}=a\frac{(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

21) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}=\frac{3}{2+\sqrt{5}}\bullet 1=\frac{3}{2+\sqrt{5}}\bullet\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ $=3\bullet\frac{(2-\sqrt{5})}{4-(\sqrt{5})^2}$ $=3\bullet\frac{(2-\sqrt{5})}{4-5}$ $=3\bullet\frac{(2-\sqrt{5})}{-1}=$

$=-3\bullet(2-\sqrt{5})$

NOTA ESPLICATIVA N. 4

$\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=1$

Salteremo questo passaggio nel prosieguo.

22) $\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{1}{(3-\sqrt{3})}\frac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}=\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

23) $\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2}{(1+\sqrt{5})}\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})}=2\frac{(1-\sqrt{5})}{1-5}=2\frac{(1-\sqrt{5})}{-4}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$

24) $\frac{7}{2-\sqrt{3}}=\frac{7}{(2-\sqrt{3})}\frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}=\frac{7(2+\sqrt{3})}{4-3}=7(2+\sqrt{3})$

25) $\frac{3}{2-\sqrt{7}}=\frac{3}{(2-\sqrt{7})}\frac{(2+\sqrt{7})}{(2+\sqrt{7})}=\frac{3(2+\sqrt{7})}{4-7}=\frac{3(2+\sqrt{7})}{-3}=-(2+\sqrt{7})$

26) $\frac{1}{2\sqrt{5}-3}=\frac{1}{(2\sqrt{5}-3)}\frac{(2\sqrt{5}+3)}{(2\sqrt{5}+3)}=\frac{(2\sqrt{5}+3)}{4\bullet 5-9}=\frac{(2\sqrt{5}+3)}{11}$

27) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+2}=\dfrac{2}{(3\sqrt{2}+2)}\dfrac{\left(3\sqrt{2}-2\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\right)}=\dfrac{2\left(3\sqrt{2}-2\right)}{9\bullet 2-4}=\dfrac{6\sqrt{2}-4}{14}=\dfrac{2\left(3\sqrt{2}-2\right)}{14}=\dfrac{\left(3\sqrt{2}-2\right)}{7}$

28) $\dfrac{10}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{10}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{10\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=10\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$\dfrac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\dfrac{6}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}\dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}=\dfrac{6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{9\bullet 2-4\bullet 3}=\dfrac{6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{18-12}=\dfrac{6\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{6}=$

$=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

29) $\dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}}=\dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2-3}=-3\sqrt{2}\sqrt{3}$

30)

$\dfrac{-2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}=\dfrac{\left(-2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)}{(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})}\dfrac{\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\left(-2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)\left[-\left(-2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)\right]}{9\bullet 5-4\bullet 2}=$

$=\dfrac{\left(-2\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)}{37}\quad=\dfrac{-8-45}{37}=-\dfrac{53}{37}$

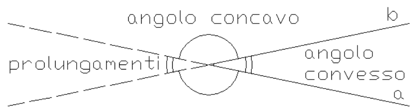
2-GONIOMETRIA

2.1-CONCETTO DI GONIOMETRIA

La goniometria, che significa letteralmente <<misura dell'angolo>>,s'interessa,appunto,di ciò e, delle relazioni, che si manifestano tra essi.
Altresì definisce le funzioni goniometriche e ne studia le proprietà.

2.2-ANGOLI

Date due semirette a e b aventi la stessa origine O,queste dividono il piano in due parti ognuna
delle quali,comprese le semirette,è definita angolo.



O, a e b sono definiti,rispettivamente,vertice e lati dell'angolo che può essere convesso se non contiene i prolungamenti dei lati e concavo in caso contrario.
Il grado che si definisce come la novantesima parte di un angolo retto è l'unità di misura pratica
degli angoli.
Ogni grado si suddivide in 60 minuti primi;ogni primo si suddivide in 60 minuti secondi.
Il sistema di suddivisione è detto sessagesimale per tale motivo.
Il radiante,che si definisce come l'angolo al centro di una circonferenza di qualsiasi raggio che
sottende un arco la cui misura è pari a quella del suo raggio,è l'unità di misura teorica degli angoli.
La misura in radianti dell'angolo giro(360°) è pari a 2Π.

Per dimostrare ciò si consideri 2Π e si moltiplichi e si divida per r

$$2\Pi = 2\Pi\frac{r}{r}$$

Poiché 2Πr è la misura della circonferenza si ha che:

$$2\Pi = 2\Pi\frac{r}{r} = \frac{circonferenza}{raggio}$$

Tale rapporto è definito angolo giro per cui:

$$2\Pi = 2\Pi\frac{r}{r} = \frac{circonferenza}{raggio} = 360° \text{ (angolo giro)}$$

Quattro angoli retti formano un angolo giro.

Riepilogando,2Π è la misura dell'angolo giro in radianti mentre 360° è la misura dello stesso in gradi.
La corrispondenza gradi(x)-radianti(y) si attua con la proporzione:

$$360°: 2\Pi = x : y$$

In una proporzione il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi,per cui:

$$(1) 2\Pi x=360° y$$

Se si vuole ricavare da questa uguaglianza(1) la misura in gradi x in funzione di quella in ra-
Dianti,y, basta dividere primo e secondo membro per 2Π(l'uguaglianza non cambia):

$$\frac{2\pi x}{2\pi} = \frac{360° y}{2\pi}$$

semplificando s'ottiene:

$$\mathbf{x}= \frac{180° y}{\pi}$$

Se si vuole ricavare dalla (1) la misura in radianti y in funzione di quella in gradi x basta dividere
primo e secondo membro della stessa per 360°:

$$\frac{2\pi x}{360°} = y$$

semplificando si ha:

$$y= \frac{\pi x}{180°}$$

ESERCIZI

31) Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \frac{17}{11}\pi$

$$x = \frac{180°}{\pi} y$$

Sostituendo a y la relativa espressione si ha:

$$x = \frac{180°}{\pi}\frac{17}{11}\pi = \left(\frac{3060}{11}\right)^{\circ}$$

32) Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \pi$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\pi = 180^{\circ}$$

33)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = 2\pi$

$$x = \frac{180°}{\pi} 2\pi = 360°$$

L'esercizio **2)** manifesta che mezza circonferenza corrisponde ad un angolo piatto (180°)
L'esercizio **3)** manifesta che la circonferenza corrisponde ad un angolo giro(360°)

34)Esprimere in radianti y la misura dell'angolo in gradi $x = 27°35'$
Tale angolo ridotto in frazione di grado vale:

$$x = 27°35' = \left(27 + \frac{35}{60}\right)^{\circ} = \left(27 + \frac{7}{12}\right)^{\circ} = \left(\frac{324+7}{12}\right)^{\circ} = \left(\frac{331}{12}\right)^{\circ}$$

Di conseguenza:

$$y = \frac{\pi}{180^{\circ}} x = \frac{\pi}{180^{\circ}}\left(\frac{331}{12}\right)^{\circ} = \frac{331}{2160}\pi$$

35)Esprimere in radianti y la misura dell'angolo in gradi $x = 1^{\circ}$

$$y = \frac{\pi}{180^{\circ}} x = \frac{\pi}{180^{\circ}} 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

36)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\frac{\pi}{6} = 30°$$

37)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti y =$\frac{\pi}{3}$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$$

38)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$$

39)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \pi$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\pi = 180^{\circ}$$

40)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \frac{2}{3}\pi$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\frac{2}{3}\pi = 120^{\circ}$$

41)Esprimere in gradi x la misura dell'angolo in radianti $y = \frac{3}{2}\pi$

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}\frac{3}{2}\pi = 270^{\circ}$$

42)Esprimere in radianti y la misura dell'angolo in gradi x=30°

$$y = \frac{\pi}{180^{\circ}} 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$$